Stabilization of small solutions for NLS with potential

Masaya Maeda (Chiba University)

based on the joint work with Scipio Cuccagna (University of Trieste)

In this talk, we consider the long time behavior of small solutions of cubic nonlinear Schrödinger equations with potential in 3D:

$$iu_t = -\Delta u + Vu + |u|^2 u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3.$$

We assume that the Schrödinger operator $-\Delta + V$ have more than two simple negative eigenvalues.

By spectral decomposition, it is easy to see that the solution of linear Schrödinger equation with potential decouples in quasi-periodic solutions (sum of periodic solutions corresponding to the eigenvalues of Schrödinger operator) and scattering waves (which corresponds to the continuous spectrum of the Schrödinger operator).

For the nonlinear case, naively one can think that the dynamics is similar to the linear case because we are considering small solutions (at least short time). Further, it is known that there exists small solitary waves (or soliton in short) which bifurcate from the eigenvalues of the Schrödinger operator.

However, it is shown that under suitable assumptions, all small solutions decouples into one soliton and scattering wave and in particular there exists no quasi-periodic solutions.

In this talk, I will try to explain the mechanism which prohibits the coexistence of two solitons. This is a nonliear interaction (called Fermi Golden Rule) between the discrete spectrum and continuous spectrum which creates radiation damping. In addition, if I have time, I will talk about discrete nonlinear Schrödinger equations with potential which admits two mode quasi-periodic solutions. This fact is due to the absence of Fermi Golden Rule.

本講演では線形ポテンシャルをもつ 3 次冪非線形シュレディンガー方程式の小さな解の時間大域挙動を考察する。ここではシュレディンガー作用素は 2 つ以上の固有値をもつと仮定する。

まず、ポテンシャルをもつ線形シュレディンガー方程式の解はシュレディンガー作用素のスペクトル分解により解の様子がよくわかる。実際、線形の場合では解は固有値成分に対応する空間的に局在した時間周期解の和と連続スペクトル成分に対応する散乱解に分解される。

非線形の場合でもここでは小さな解を考えているためその挙動は（少なくとも短い時間では）線形の解に近いと考えられる。また、分岐により非線形シュレディンガー方程式は小さな定在波解（小さなソリトン）をもつことがわかる。

しかし、長時間の挙動では非線形相互作用により非線形方程式の解の挙動は線形の場合と真に異なる。実際、非線形シュレディンガー方程式の小さな解は一つの小さなソリトンと散乱解に分解される。特に、二つ以上のソリトン解は共存できない。

この講演では二つ以上のソリトンが共存できない理由を、固有スペクトルと連続スペクトルの非線形相互作用の観点から説明したい。この非線形相互作用はフェルミの黄金律と呼ばれる。また、時間が許せば離散非線形シュレディンガー方程式の準周期解の存在についても話したい。