Stability of line solitons for KP-II

水町　徹 (Tetsu Mizumachi) 広島大学

The KP-II equation

$$\partial_x(\partial_t u + \partial_x^3 u + 3\partial_x(u^2)) + 3\partial_y^2 u = 0 \quad \text{for } t > 0 \text{ and } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{KP-II}$$

is a 2-dimensional generalization of the KdV equation that takes slow variations in the transversal direction into account. It describes the motion of shallow water waves with weak surface tension. Any solutions of the KdV equation formally satisfy the KP-II equation.

In this lecture, I will talk on the transversal stability of KdV 1-solitons as solutions of the KP-II equation (1-line solitons) and explain modulations of the line soliton solutions are described by a system of Burgers' equations.

The KP-II equation is a Hamiltonian system and in $L^2(R^2)$, the spectrum of the linearized operator around the line solitons consists of the entire imaginary axis. However, in an exponentially weighted space where the size of perturbations are biased in the direction of motion, the spectrum of the linearized operator consists of a curve which goes through 0 and the set of continuous spectrum which locates in the stable half plane and is away from the imaginary axis. The former one appears because line solitons are not localized in the transversal direction and is related to the modulation of line solitons. Thanks to the finite speed propagation of modulations of the line soliton along its crest, the set of 1-line solitons is not stable in $L^2(R^2)$ but stable in $L^2_{loc}(R^2)$.

KP-II 方程式は空間 1 次元の長波長近似モデルである KdV 方程式

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + 3\partial_x(u^2) = 0 \tag{KdV}$$

に波の主な進行方向 (x 方向) と垂直な方向 (y 方向) の波の緩やかな変化を取れ入れたモデルであり 2 次元の水面波の運動を記述する．$u(t, x)$ が KdV 方程式の解であれば，y 方向に一様な KP-II 方程式の解になっている．

KdV 方程式のの 1-soliton 解

$$\varphi_c(x - 2ct) \quad \left(\varphi_c(x) = c\,\mathrm{sech}^2(\sqrt{c/2}x),\ \ c > 0\right)$$

を KP-II 方程式の y 方向に一様な進行波解 (line soliton) とみなした場合の安定性について解説する．KP-II 方程式はハミルトニアン系であり，エネルギーや L^2-ノルムなどの保存則をもつ．line soliton は $L^2(R^2)$ に属する摂動に対して線形中立安定であるが，line soliton の進行方向に指数増大する関数を重み関数とする重み付空間においては，線形化作用素のスペクトルは 0 を通る曲線部分を除くと安定半平面の内側にある．0 を通る曲線部分は，ソリトン解の周りでの線形化 KdV 作用素の 0 固有値が連続スペクトルに変化したものであり，line soliton の摂動による変調に関係している．line soliton の変調する様子は line soliton の速度と傾きに関するパラメータについての時間変数 t と横断方向の変数 y に関する Burgers 方程式系で記述される．line soliton の変調は有限速度で line soliton の頂に沿って横方向に伝わるため, line soliton 解は $L^2_{loc}(R^2)$ で安定になる．