

Title: Global behavior of large solutions for NLS with potential

Kenji Nakanishi (Osaka University)

Abstract: Nonlinear dispersive equations generate solutions with various space-time behavior. The three major types are: scattering, blow-up, and solitons, which are further classified into stable and unstable ones. Stable solitons are important by themselves, corresponding to some characteristic physical phenomena. Unstable ones are also important to understand the global dynamics of the equation, as they often appear on the threshold between different types of solutions.

In general, a single equation or system can have a few stable solitons and many unstable solitons, but the global dynamics containing both of them are yet to be explored from the mathematical or PDE viewpoint, especially when solitons are large and distinct from each other.

In this talk, we investigate a simple model case, which is the nonlinear Schrodinger equation with a potential and a focusing cubic nonlinearity, assuming that the linear equation with the potential has a single negative eigenvalue. The nonlinear equation has small stable solitons due to the potential, and large unstable solitons due to the nonlinearity. Restriction to small mass (L^2 norm) enables us to characterize the solitons, at least for the lowest energy (the ground state) and the second lowest energy (the first excited state). Then we consider the first natural question: Classify the global dynamics in terms of the initial data in an energy region which contains only the ground state and the first excited state.

題目：ポテンシャル付 NLS の大きな解の大域挙動

要旨：非線形分散型方程式は様々な時空挙動の解を持つ。三つの典型は散乱、爆発、ソリトンで、ソリトンは更に安定なもの不安定なものに分類される。安定なソリトンは、それ自体が特徴的な物理現象を表すものとして重要である。不安定なソリトンも、しばしば異なる解の境に現れるため、方程式の大域挙動を理解するために重要である。

一般に、一つの方程式またはシステムが幾つかの安定なソリトンと多数の不安定なソリトンを持ち得るが、両者を含む大域ダイナミクスは、特にソリトンが大きく互いに異なる場合、数学的 (PDE の) 観点からは未だ良く分かっていない。

この講演では簡単なモデルケースとして、ポテンシャルと集約的 3 次の非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式で、ポテンシャル付の線形方程式が単独の負の固有値を持つ場合について調べる。この非線形方程式はポテンシャルから来る小さな安定ソリトンと、非線形項から来る大きな不安定ソリトンを持つ。小さな質量 (L^2 ノルム) に制限すれば、少なくとも最小エネルギー (基底状態) と 2 番目のエネルギー (第 1 基底状態) についてはソリトンの特徴付けられる。そこで考えるのは最初の自然な問題である：基底状態と第 1 励起状態のみが入るようにエネルギー領域を制限して大域ダイナミクスを初期状態から分類せよ。